

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему «Аналіз механізму збудження автоколивань»

Виконав:

студент групи МП 41 IV курсу
(перший бакалаврський рівень),
спеціальності

113 – Прикладна математика
освітньої програми

«Прикладна математика»

Чеховської С.П.

Науковий керівник:

кандидат фіз.-мат. наук,

доцент кафедри прикладної математики

Пославський С.О.

Рецензент:

доктор технічних наук,

професор

Стрельнікова О.О.

Анотації

Чеховської С.П. Аналіз механізму збудження автоколивань

У цій роботі впроваджено метод модифікації стаціонарних автоколивальних систем для створення динаміки м'якого та жорсткого спуску за допомогою буферизації вхідного потоку. У якості прикладу використано релаксаційну автоколивальну систему «Ваза Тантала». Мета дослідження полягає у визначенні характеру коливань та фазових траєкторій у оригінальній та модифікованих системах за різних параметрів. Використовуючи аналітичні та чисельні методи, ми створили графічні візуалізації коливальних процесів у «Вазі Тантала» за різних модифікацій, що підтверджують коректність теоретичних моделей, наведених у роботі. Проведений аналіз вказує на можливість використання отриманих результатів для проєктування подібних механічних систем із складною динамічною поведінкою, які використовують автоколивання у якості рушійної сили.

Chekhovskoi S.P. Analysis of the self-oscillation excitation mechanism

In this article, a method for modifying stationary self-oscillating systems to create soft and hard transition dynamics through input stream buffering has been observed. The «Vase of Tantalus» relaxation self-oscillating system is used as an example. The aim of the study is to determine the nature of oscillations and phase trajectories in both the original and modified systems under various parameters. Using analytical and numerical methods, we created graphical visualizations of the oscillatory processes in the «Vase of Tantalus» under different modifications, which confirm the correctness of the theoretical models presented in the work. The analysis conducted indicates the possibility of using the obtained results for designing similar mechanical systems with complex dynamic behavior that utilize self-oscillations as a driving force.

Зміст

Анотації	2
Вступ	4
1. Модель звичайної «Вази Тантала»	6
1.1. Основні диференціальні рівняння	6
1.2. Пошук рівняння руху і моментів зміни фаз	8
1.3. Явний розв'язок рівняння руху у фазі спуску	11
1.4. Побудова фазового портрету	14
1.5. Підсумок розділу	17
2. Модель «Ваза Тантала» з м'яким спуском	18
2.1. Складання диференціальних рівнянь	18
2.2. Визначення потоку води з буферної вази	19
2.3. Пошук об'єму води, що потрапляє у вазу Тантала	24
2.4. Рівняння руху рівня води модифікованої вази Тантала	26
2.5. Аналіз графічної візуалізації моделі модифікованої «Вази Тантала»	28
2.6. Підсумок розділу	34
3. Модель «Ваза Тантала» з жорстким спуском	35
3.1. Побудова й аналіз диференціальних рівнянь буферної вази	36
3.2. Визначення й аналіз функції потоку із зворотного клапану	38
3.3. Побудова і графічний аналіз автоколивальної моделі	40
3.4. Підсумок розділу	45
Висновки	46
Список використаних джерел	48

Вступ

Автоколивання є неочевидним процесом, що виникає в динамічних системах залежно від їх структури. У подібних дисипативних системах, внаслідок взаємодії внутрішніх елементів, відбувається не затухаючий коливальний процес, за рахунок додаткового неперіодичного підтоку енергії в систему, що компенсує її розсіювання під час коливання. Автоколивання можуть виникати спонтанно у якості руйнівної сили або, навпаки, передбачувано, як невід'ємний елемент в роботі цих систем. Вивчення механізму збудження цього процесу створює інструмент для широкого практичного застосування в побудові механічних систем [1], а також, буде фундамент у дослідженні теорії самоорганізації [2].

Дана робота присвячена дослідженню механізму релаксаційних автоколивань [3]. Це різновид автоколивань, за якого у системі спостерігається фаза накопичення енергії і фаза її трати. Зазвичай у таких системах можна виділити перемикачі: частини системи, що мають нелінійну природу і відповідають за зміни фаз. Таким чином, рівень енергії релаксаційної системи можна спрощено описати як кусково задану функцію, де точки розриву — моменти зміни фаз, якщо вважається, що перемикання між фазами є миттєвим.

Актуальним питанням у вивченні автоколивальних систем є узагальнення теорії для різних коливальних процесів, що підпадають під дане означення. Більшість досліджень зосереджуються на розгляді конкретних прикладів, які не дають загального усвідомлення автоколивального механізму та областей його застосування. Для систематизації та узагальнення автоколивальної теорії є корисним розгляд загальних модифікацій систем та динаміки, яку ці модифікації викликають.

У даній роботі розглядається гідродинамічна релаксаційна автоколивальна система «Ваза Тантала» [4] та її модифіковані варіації. Оригінальна система складається з двох основних елементів: вази та сифону, де до вази надходить деякий постійний потік води, а ефект сифону викликає регулярне її спустошення. Така система є стаціонарною, адже всі параметри системи лишаються незмінними у часі, що відображається на незмінності періоду та характеру коливань в продовж часу.

Наша мета: зосередитись саме на обґрунтованій побудові математичної моделі даної автоколивальної системи і дослідженні характеру її коливань в залежності від вхідного потоку. Розглядаємо модифікації, що частково буферизують вхідний потік та зумовлюють динамічні зміни характеру та періоду коливань. Даними модифікаціями є наближуємо поведінку «Вази Тантала» до автоколивань з м'яким та жорстким спусками [1].

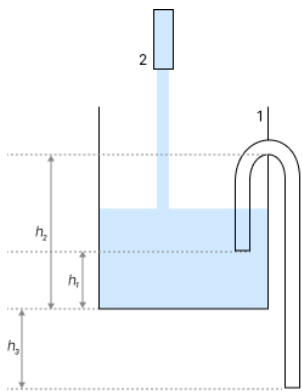
У першому розділі розглядаємо побудову повністю аналітичної моделі звичайної «Вази Тантала», моделюємо й аналізуємо її поведінку за різних значень вхідного потоку.

У другому розділі вводимо модифікацію «Вази Тантала»: додаткову буферну вазу, що нелінійно впливає на значення вхідного потоку і симулює м'який спуск. Проводимо дослідження методами динамічних систем на пошук граничних циклів та проводимо аналітичне й чисельне моделювання системи за різних початкових станів та значень вхідного потоку.

У третьому розділі надбудову другого розділу ускладнюємо, для досягнення симуляції жорсткого спуску автоколивальної системи, та моделюємо коливання з різних початкових станів та значень вхідного потоку.

1. Модель звичайної «Вазы Тантала»

Вода надходить до ємності постійним потоком через трубку (2). Також ваза обладнана сифоном (1), як вказано на малюнку. Для такої системи відбувається автоколивальний процес, який складається з початкової фази та двох фаз коливань. Під час коливання витрачається потенціальна енергія води, до того ж, отримана кінетична енергія повністю розсіюється, без повернення її систему. Енергія системи відновлюється за рахунок рівномірного її надходження зовні, для підйому та повернення води у коливальну систему.



Модель 1:
«Ваза Тантала»

Дослідимо механізм виникнення автоколивань у цій коливальній системі.

Фаза 0: рівень води поступово набуває висоти h_1 .

Фаза 1: рівень води поступово зростає. Коли він досягає висоти h_2 , система переходить у фазу 2.

Фаза 2: потік продовжує надходити з трубки (2) і також вода виливається з сифону (1), доки її рівень не опуститься до висоти h_1 . Після цього система знову входить у фазу 1.

1.1. Основні диференціальні рівняння

Введемо наступні позначення:

Q [m^3/c] — потік води з постачальної трубки

S [m^2] — площа перерізу вазы

s [m^2] — площа перерізу сифону

h_1 [m] — відстань від дна до внутрішнього носика сифону

h_2 [m] — відстань від дна до перепаду сифону

h_3 [m] — відстань від дна до нижнього носика сифону

v [m/c] — швидкість виходу потоку сифону

$x(t)$ [m] — рівень води у вазі відносно дна у момент часу t

Розглянемо зміну об'єму рідини у вазі. Виражаючи зміну рівня води всередині вази dx залежно від нескінченно малої зміни часу dt , отримуємо наступні диференціальні рівняння для кожної з фаз на відповідних часових інтервалах.

$$\text{Фаза 0:} \quad S \cdot dx = Q \cdot dt \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.1.1)$$

$$\text{Фаза 1:} \quad S \cdot dx = Q \cdot dt \quad t \in [t_i, \hat{t}_i] \quad (1.1.2)$$

$$\text{Фаза 2:} \quad S \cdot dx = Q \cdot dt - sv \cdot dt \quad t \in [\hat{t}_i, t_{i+1}] \quad (1.1.3)$$

Зауважимо, що всі параметри даних рівнянь, задаються при побудові системи, окрім параметру швидкості. У нашій моделі розглядається квазістаціонарний потік води, тому швидкість витoku розрахуємо за Законом Бернуллі [5], якщо висота водяного стовпа є різницею рівня води у вазі та нижнього носика сифону.

$$v = \sqrt{2g(x(t) + h_3)} \quad (1.1.4)$$

Можемо ввести позначення для добутку незмінних у межах обраної системи параметрів, для спрощення запису.

$$q = s\sqrt{2g} \equiv const \quad (1.1.5)$$

Тоді, динаміка системи у фазі 2 описується наступним диференціальним рівнянням.

$$S \cdot dx = Q \cdot dt - q\sqrt{x(t) + h_3} \cdot dt \quad (1.1.6)$$

Зазначимо, що за описом моделі, у фазі 2 має спостерігатись зменшення рівня води. Тобто необхідно, щоб похідна в даній фазі приймала лише від'ємні значення. Оскільки, з теоретичного опису моделі відомо, що у фазі 2 $x(t) \in [h_1, h_2]$, можемо знайти наступну оцінку для параметру вхідного потоку.

$$Q < s\sqrt{2g(h_1 + h_3)} \quad (1.1.7)$$

1.2. Пошук рівняння руху і моментів зміни фаз

Зважаючи на побудову диференціальних рівнянь, можемо стверджувати, що рівняння висоти водяного стовпа є кусково визначеною функцією. Щоб знайти розв'язок, необхідно отримати функції, що визначають рівняння руху на кожній з фаз, та встановити часові проміжки на яких вони будуть визначені.

Принцип визначення функцій фаз, полягає у послідовному розв'язанні задач Коші для диференціальних рівнянь, згаданих у попередньому пункті. За допомогою функції попередньої фази, знаходиться момент зміни фаз, що постає задачею Коші для наступної фази.

Знайдемо функцію висоти водяного стовпа для кожної з фаз коливання.

Фаза 0. З виразу (1.1.1) за задачі Коші $x(t_0)=0$, функція руху рівня води, на проміжку $t \in [t_0, t_1]$ задається рівнянням:

$$x(t) = \frac{(t-t_0)Q}{S} \quad (1.2.1)$$

Момент виходу з даної фази визначає умова $x(t_1)=h_1$.

$$t_1 = \frac{S}{Q}h_1 + t_0 \quad (1.2.2)$$

Фаза 1. З виразу (1.1.2) за початкової умови $x(t_i)=h_1$, закон зміни рівня води, на проміжку $t \in [t_i, \hat{t}_i]$ має такий вигляд:

$$x(t) = \frac{(t-t_i)Q}{S} + h_1 \quad (1.2.3)$$

Момент виходу з даної фази, також, визначається умовою $x(\hat{t}_i)=h_2$.

$$\hat{t}_i = \frac{S(h_2-h_1)}{Q} + t_i \quad (1.2.4)$$

Фаза 2. Триває, на проміжку $t \in [\hat{t}_i, t_{i+1}]$. Для побудови рівняння руху в цій фазі, необхідно розв'язати диференціальне рівняння (1.1.6) за умови задачі Коші $x(\hat{t}_i) = h_2$. Дане рівняння не є тривіальним відносно змінної координати, тому опишемо пошук розв'язку диференціального рівняння більш детально.

Знайдемо цей розв'язок у неявному вигляді, як розв'язок диференціального рівняння (1.1.6) відносно змінної t .

$$\frac{t}{S} + C = \frac{-2\sqrt{x(t)+h_3}}{q} - \frac{2Q \ln|q\sqrt{x(t)+h_3} - Q|}{q^2} \quad (1.2.5)$$

Розкриємо модуль, зважаючи на оцінку (1.1.7).

$$\frac{t}{S} + C = \frac{-2\sqrt{x(t)+h_3}}{q} - \frac{2Q \ln(q\sqrt{x(t)+h_3} - Q)}{q^2} \quad (1.2.6)$$

Щоб однозначно визначити константу, яка фіксує розв'язок, підставимо умову задачі Коші $x(\hat{t}_i) = h_2$.

$$\hat{C}_i := \frac{-\hat{t}_i}{S} - \frac{2\sqrt{h_2+h_3}}{q} - \frac{2Q \ln(q\sqrt{h_2+h_3} - Q)}{q^2} \quad (1.2.7)$$

Зауважимо, що суттєва частина розв'язку не видозмінюється між ітераціями коливань, якщо час відліку починати з часу потрапляння у дану фазу. Це легко можна помітити у рівнянні руху після наступного перепозначення.

$$\hat{C} := \frac{-2\sqrt{h_2+h_3}}{q} - \frac{2Q \ln(q\sqrt{h_2+h_3} - Q)}{q^2} \quad (1.2.8)$$

Тоді рівняння висоти водяного стовпа у фазі спуску на фіксованій ітерації, задається рівнянням:

$$\frac{t - \hat{t}_i}{S} + \hat{C} = \frac{-2\sqrt{x(t)+h_3}}{q} - \frac{2Q \ln(q\sqrt{x(t)+h_3} - Q)}{q^2} \quad (1.2.9)$$

Отже, тепер можемо знайти момент повернення до фази 1. Для цього достатньо зробити підстановку в рівняння (1.2.9) виразу $x(t_{i+1}) = h_1$.

$$t_{i+1} = \hat{t}_i - S\hat{C} - \frac{2S\sqrt{h_1+h_3}}{q} - \frac{2SQ \ln(q\sqrt{h_1+h_3}-Q)}{q^2} \quad (1.2.10)$$

Згадуючи попередні позначення, можемо дізнатись період коливань і явні формули для пошуку моментів зміни фаз.

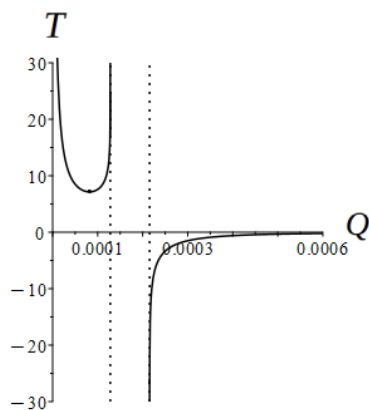
$$T := \frac{S(h_2-h_1)}{Q} + \frac{2S(\sqrt{h_2+h_3}-\sqrt{h_1+h_3})}{q} + \frac{2QS}{q^2} \ln\left(\frac{q\sqrt{h_2+h_3}-Q}{q\sqrt{h_1+h_3}-Q}\right) \quad (1.2.11)$$

$$t_i = T(i-1) + t_1 \quad (1.2.12)$$

$$\hat{t}_i = \frac{S(h_2-h_1)}{Q} + T(i-1) + t_1 \quad (1.2.13)$$

Нижче, наведемо графік залежності періоду коливань, в залежності від вхідного потоку. На області визначення (1.1.7), спостерігається одне екстремальне значення, що відповідає мінімальному періоду. У подальшому, дане значення потоку називатимемо оптимальним. Аналітично знайти цей екстремум є досить складною задачею, тому значення, що було використано в подальших моделюваннях отримуємо чисельно.

Графік 1:



Залежність періоду коливань від потоку

$$\begin{aligned} S &= 0.002 \\ q &= 0.0001\sqrt{20} \\ h_1 &= 0.05 \\ h_2 &= 0.2 \\ h_3 &= 0.032 \end{aligned}$$

Параметри

За нульового потоку, жодного коливання не відбудеться, оскільки фаза підйому не буде завершена. Збільшення вхідного потоку зменшує тривалість

фази підйому води та збільшує тривалість фази спуску [9]. На протистоянні змін їх тривалості, породжується екстремальне значення потоку, за якого коливання матимуть найменший період.

Зауважимо, що вираз (1.2.11) описує період коливань при $Q \in (0, q\sqrt{h_1+h_3})$, і значення отримані поза даної області не зобов'язані відповідати дійсності.

Пунктирні лінії на графіку відповідають асимптотам $Q = q\sqrt{h_1+h_3}$ та $Q = q\sqrt{h_2+h_3}$ відповідно. Період на проміжку між асимптотами є нескінченним, оскільки посеред фази спуску встановлюється рівновага потоків входу та виходу.

Від'ємне значення періоду, що виникає при $Q > q\sqrt{h_2+h_3}$, говорить про те, що коливання не просто зупинилось а стало віддалятися від можливого моменту закінчення. У теоретичному експерименті, ця поведінка відповідає встановленню рівноваги вхідного та вихідного потоків, при висоті водяного стовпа вище за h_2 .

Надалі будемо досліджувати зміну характеру коливань в залежності від відхилення вхідного потоку від даного оптимального значення.

На цьому етапі можемо стверджувати, що ми визначили функцію зміни висоти рівня води відносно часу, як кусково задану. Однак функція, що визначає рівняння руху у фазі спуску води, задана у неявному вигляді, що значно ускладнює подальше дослідження системи.

1.3. Явний розв'язок рівняння руху у фазі спуску

Рівняння (1.2.9) неможливо розв'язати відносно $x(t)$ в елементарних функціях. Однак очевидно, що цей вираз є однозначним для кожного $t \in [\hat{t}_i, t_{i+1}]$, оскільки (1.2.9) як функція часу від висоти (обернена до $x(t)$), є монотонною.

Виявляється, що явний розв'язок можливо отримати за допомогою добре вивченої неелементарної функції Ламберта [6]. Ця функція є оберненою до $x e^x$

та позначається як $W(y)$. Основна її властивість, якою ми будемо користуватись, є наступною:

$$W(xe^x) = x \quad (1.3.1)$$

Відомо, що при $y \in (-e^{-1}, 0)$ функція Ламберта $W(y)$ повертає два можливих значення, оскільки xe^x не є монотонною на всій області визначення. В нашій задачі розглядатимемо функцію Ламберта як обернену до монотонно зростаючої гілки xe^x , що визначена на проміжку $x \in [-1, \infty)$. Таким чином, розглядаючи лише верхню гілку функції, вважаємо, що $W(y)$ визначена однозначно.

Виконаємо ряд перетворень для отримання явного розв'язку рівняння руху води у фазі спуску. Перепишемо (1.2.9) таким чином, щоб виділити повторювані структури для перепозначення.

$$\frac{-q^2}{2Q} \left(\frac{t - \hat{t}_i}{S} + \hat{C} \right) - \ln(Q) - 1 = \frac{q\sqrt{x(t) + h_3}}{Q} - 1 + \ln \left(\frac{q\sqrt{x(t) + h_3}}{Q} - 1 \right) \quad (1.3.2)$$

Введемо позначення, які допоможуть нам наочно розглянути процес перетворення.

$$z(t) := \frac{q\sqrt{x(t) + h_3}}{Q} - 1 \quad (1.3.3)$$

$$A_i(t) := \frac{-q^2}{2Q} \left(\frac{t - \hat{t}_i}{S} + \hat{C} \right) - \ln(Q) - 1 \quad (1.3.4)$$

Тоді залежність (1.3.2) досягає наступного спрощеного вигляду:

$$A_i(t) = z(t) + \ln(z(t)) \quad (1.3.5)$$

Після потенціювання, отримаємо вираз виду:

$$e^{A_i(t)} = z(t) e^{z(t)} \quad (1.3.6)$$

Зважаючи на оцінку (1.1.7), бачимо, що обидві сторони рівності приймають додатні значення, де функція Ламберта є однозначно визначеною.

Тому застосуємо її до обох боків рівності, і скористуємося рівністю (1.3.1), для знаходження явного виразу для $z(t)$ відносно змінної часу.

$$W(e^{A_i(t)})=z(t) \quad (1.3.7)$$

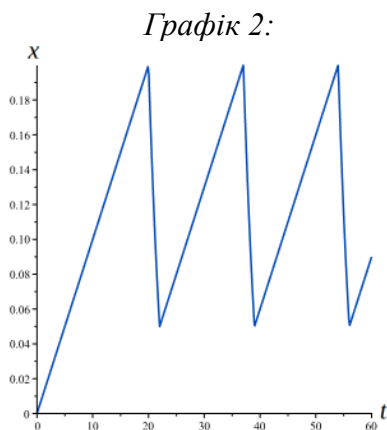
Після зворотної заміни змінної $z(t)$, нарешті, отримуємо явне рівняння руху у фазі спуску, в залежності від часу.

$$x(t)=\frac{Q^2}{q^2}(W(e^{A_i(t)})+1)^2-h_3 \quad (1.3.8)$$

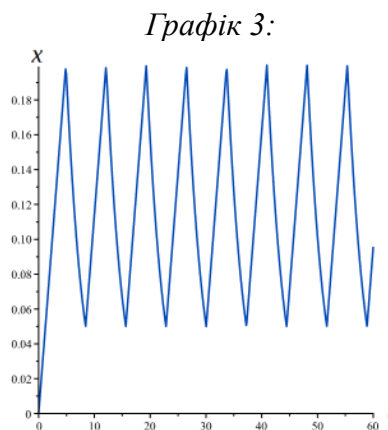
Тепер рівняння руху рівня водяного стовпа у «Вазі Тантала» відносно часу, має наступний вид:

$$x(t)=\begin{cases} \frac{Q}{S}(t-t_0) & , t \in [t_0, t_1] \\ \frac{Q}{S}(t-t_i)+h_1 & , t \in [t_i, \hat{t}_i] \\ \frac{Q^2}{q^2}(W(e^{A_i(t)})+1)^2-h_3 & , t \in [\hat{t}_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (1.3.9)$$

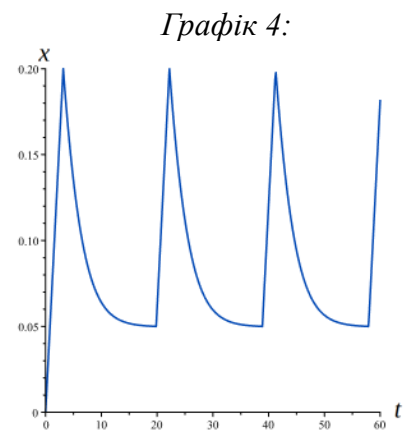
Графічні візуалізації висоти водяного стовпа від зміни часу, що побудовані за формулою (1.3.9), при різних значеннях параметру вхідного потоку, можна спостерігати на графіках нижче.



Залежність рівня водяного стовпа від часу при Q меншому за оптимальний



Залежність рівня водяного стовпа від часу при Q оптимальному



Залежність рівня водяного стовпа від часу при Q більшому за оптимальний

Бачимо, що вхідний потік суттєво впливає на характер коливань у «Вазі Тантала». На графіках чітко спостерігається вплив потоку на відношення між проміжком накопичення потенційної енергії та проміжком релаксації. На *Графіку 2* добре видно, що набір води має лінійний характер, а на *Графіку 4*, що спуск поступово сповільнюється, тобто відбувається нелінійно [9].

1.4. Побудова фазового портрету

Дослідження фазового простору та побудова фазового портрету є потужним методом аналізу динамічних систем. Зокрема у дослідженні автоколивань, доцільним методом є пошуку стійких граничних циклів.

Розглянемо фазовий простір нашої динамічної системи. Для опису можливих конфігурації системи, крім рівню висоти води у вазі, необхідно додатково розглянути швидкість зміни цієї висоти у кожен момент часу. Для цього знайдемо похідну рівняння руху, яке було зазначено вище.

Фаза 0. З виразу (1.2.1), рівняння швидкості на проміжку $t \in [t_0, t_1]$ задається рівнянням:

$$\dot{x}(t) = \frac{Q}{S} \quad (1.4.1)$$

Фаза 1. З виразу (1.2.3), рівняння швидкості на проміжку $t \in [t_i, \hat{t}_i]$ задається рівнянням:

$$\dot{x}(t) = \frac{Q}{S} \quad (1.4.2)$$

Фаза 2. Щоб знайти рівняння швидкості у фазі спуску, знайдемо похідну від виразу (1.3.8).

$$\dot{x}(t) = \frac{Q^2}{q^2} \cdot 2 \cdot (W(e^{A_i(t)}) + 1) \cdot \frac{dW(e^{A_i(t)})}{d e^{A_i(t)}} \cdot e^{A_i(t)} \cdot A_i'(t) \quad (1.4.3)$$

Можемо знайти похідну від функції Ламберта зважаючи на наступну рівність [6].

$$\frac{dW}{dz}(W(z)+1)z = W(z) \quad (1.4.4)$$

Знайдемо, також, похідну $A_i(t)$.

$$A_i'(t) = \frac{-q^2}{2QS} \quad (1.4.5)$$

Після підстановки отриманих рівностей в рівняння (1.4.3) і скорочення, отримаємо вираз похідної у фазі спуску.

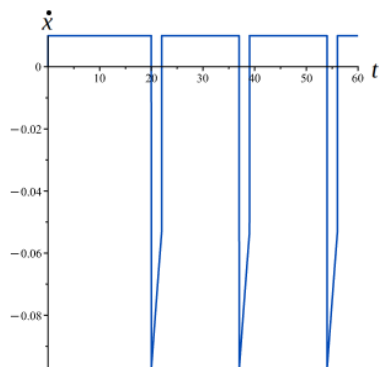
$$\dot{x}(t) = \frac{-Q}{S} \cdot W(e^{A_i(t)}) \quad (1.4.6)$$

Тепер, загальне рівняння зміни швидкості в залежності від часу задається, як кусково задана функція.

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{S} & , t \in (t_0, t_1] \\ \frac{Q}{S} & , t \in (t_i, \hat{t}_i) \\ \frac{-Q}{S} \cdot W(e^{A_i(t)}) & , t \in (\hat{t}_i, t_{i+1}) \end{cases} \quad (1.4.7)$$

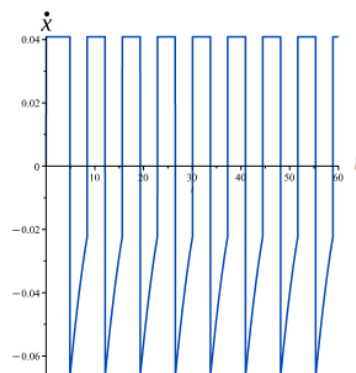
Зазначимо, що права частина рівняння швидкості не є неперервною, за особливостей спрощеної побудови нашої моделі. Оскільки, вважаємо, що в моменти зміни фаз, зміна швидкості відбувається миттєво. На графіках, це зображатиметься суцільною вертикальною лінією, що поєднує точки розриву.

Графік 5:



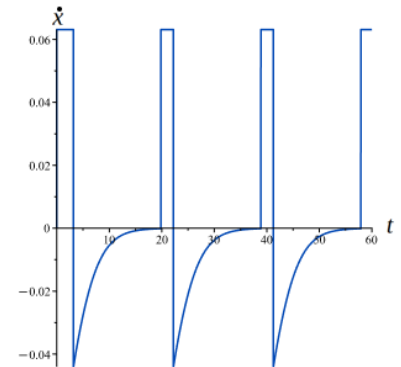
Залежність швидкості зміни рівня водяного стовпа від часу при Q меншому за оптимальний

Графік 6:



Залежність швидкості зміни рівня водяного стовпа від часу при оптимальному значенні Q

Графік 7:



Залежність швидкості зміни рівня водяного стовпа від часу при Q більшому за оптимальний

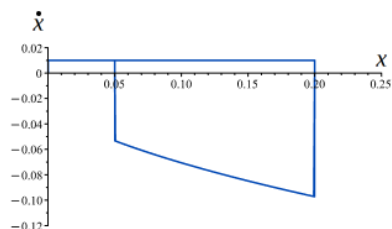
Фазовим портретом даної системи буде єдина фазова траєкторія. Вона описується параметрично заданою кривою.

$$y = \{(x(t), \dot{x}(t)) : t \in [t_0, +\infty)\} \quad (1.4.8)$$

Починаючи з моменту часу t_1 , траєкторія y є періодичною [7], і має період, який раніше був визначений як T . Наявність не тривіальних періодичних траєкторій в дисипативних динамічних системах, є ознакою того, що система є автоколивальною [1]. Однак оскільки спостерігається лише одна періодична фазова траєкторія, це є підтвердженням того, що «Ваза Тантала» є стаціонарною автоколивальною системою.

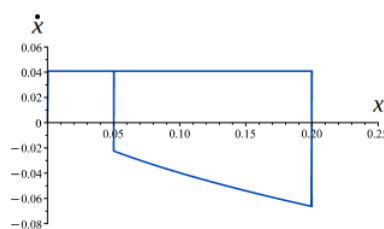
Далі, можна побачити графіки заданих фазових траєкторій при різних значеннях параметру вхідного потоку.

Графік 8:



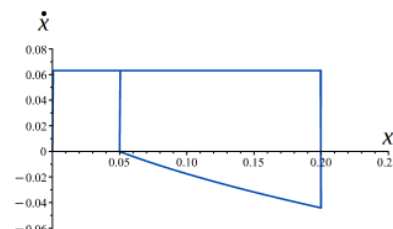
Фазова траєкторія при Q меншому за оптимальний

Графік 9:



Фазова траєкторія при Q оптимальному

Графік 10:



Фазова траєкторія при Q більшому за оптимальний

Цікавим спостереженням є те, що в залежності від параметру потоку, фазова траєкторія виконує паралельне перенесення вздовж осі \dot{x} , без змін своїх інших характеристик.

Також, спостерігається, що при оптимальному значенні потоку, площа частини граничного циклу над віссю x відповідає площі частини граничного циклу під вказаною віссю. Ці спостереження можливо в подальшому розвинути в розгляді інших автоколивальних систем, для пошуку значень параметрів, що відповідають збільшенню частоти коливань.

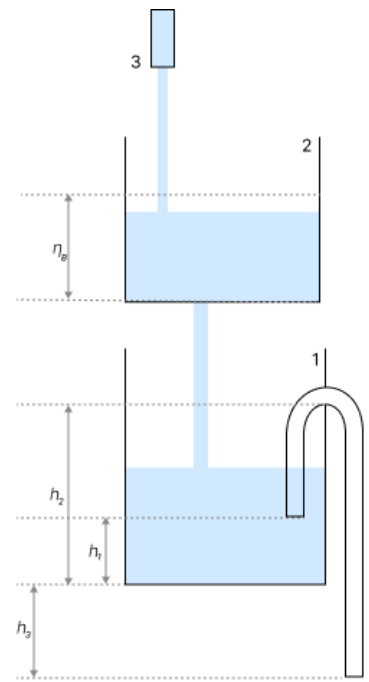
1.5. Підсумок розділу

Дослідження автоколивальної системи Ваза Тантала дозволило побудувати аналітичну математичну модель, що підтвердила її автоколивальні властивості через аналіз фазового портрету. Важливим результатом стало виявлення залежності періоду та характеру коливань від вхідного потоку, що підкреслює значущість цього параметра для системи. Однак слід відзначити обмеження розглянутої моделі, такі як ігнорування змін характеристик води при зміні тиску та відсутність врахування терміну, необхідного для зміни фаз. Отримані результати слугують підґрунтям для подальшого розгляду ускладнених більш змістовних модифікацій «Вазу Тантала» в наступних розділах.

2. Модель «Ваза Тантала» з м'яким спуском

Для моделювання м'якого спуску в автоколивальній системі «Ваза Тантала», модифікуємо систему, що була розглянута у попередньому розділі поточної роботи.

Будемо вважати, що перш ніж вода потрапляє до «Вазы Тантала» (1), вона рівномірним потоком надходить до вище розташованої буферної вазы (2), обладнаної отвором певної площі перерізу. Також, вводимо додатковий параметр η_B , який відповідає початковому рівню води у цій вазі (2). Аналогічно до попереднього розділу, вважаємо, що в початковий момент часу, вода у «Вазі Тантала» (1) відсутня.



Модель 2: «Ваза Тантала» з м'яким спуском

Таким чином, можемо спостерігати аналогічний коливальний процес до розглянутого у попередньому розділі, який поділяється на 3 фази: початкової, фази набору та фази спуску води. Однак набір можливих станів системи стає більш гнучким і виходить за межі однієї фазової траєкторії. Тому ця система цікава для вивчення.

2.1. Складання диференціальних рівнянь

Введемо додаткові позначення для буферної вазы:

$S_B [M^2]$ — площа перерізу буферної вазы

$s_B [M^2]$ — площа перерізу отвору буферної вазы

$\eta_B [M]$ — початковий рівень води у буферній вазі відносно її дна

$v_B [M/c]$ — швидкість виходу потоку з отвору буферної вазы

$x_B(t) [M]$ — рівень води у буферній вазі відносно її дна

$Q_B(t) [M^3/c]$ — потік води виходу з буферної вазы

Для подальшого аналізу, побудуємо диференціальні рівняння, що описують коливальний процес у «Вазі Тантала» в модифікованій системі. Для цього, аналогічно (1.1.1), (1.1.2), (1.1.6), розглянемо зміну об'єму рідини у вазі.

Для кожної з фаз отримаємо наступні диференціальні рівняння на відповідних часових інтервалах.

$$\text{Фаза 0:} \quad S \cdot dx = Q_B(t) \cdot dt \quad t \in [t_0, t_1] \quad (2.1.1)$$

$$\text{Фаза 1:} \quad S \cdot dx = Q_B(t) \cdot dt \quad t \in [t_i, \hat{t}_i] \quad (2.1.2)$$

$$\text{Фаза 2:} \quad S \cdot dx = Q_B(t) \cdot dt - q \sqrt{x(t) + h_3} \cdot dt \quad t \in [\hat{t}_i, t_{i+1}] \quad (2.1.3)$$

2.2. Визначення потоку води з буферної вази

Суттєва відмінність модифікованої системи, полягає у нелінійному параметрі вхідного потоку $Q_B(t)$, що тепер залежить від часу. Він описується як потік що проходить через отвір буферної вази та визначається за Законом Бернуллі [5].

$$Q_B(t) = s_B \sqrt{2g x_B(t)} \quad (2.2.1)$$

Бачимо, що маємо необхідність у пошуку функції рівня води у буферній вазі відносно часу $x_B(t)$. Зазначимо, що задача є аналогічною до пошуку рівняння руху і фазі спуску попереднього розділу, однак відміна полягає у відсутності обмежень на умову виникнення коливань.

Після позначення, аналогічно до (1.1.5),

$$q_B = s_B \sqrt{2g} \equiv const \quad (2.2.2)$$

диференціальне рівняння для пошуку $x_B(t)$ задається аналогічно до (1.1.6).

$$S_B \cdot dx_B = Q \cdot dt - q_B \sqrt{x_B(t)} \cdot dt \quad (2.2.3)$$

Воно є еквівалентним до наступного запису:

$$\dot{x}_B = \frac{Q}{S_B} - \frac{q_B}{S_B} \sqrt{x_B} \quad (2.2.4)$$

Дослідимо його на стаціонарні точки. Для цього прирівняємо \dot{x}_B до нуля.

$$\sqrt{x_B} = \frac{Q}{q_B} \quad (2.2.5)$$

Оскільки в нашій моделі висота рівня водяного стовпа є невід'ємною, то розв'язок рівняння (2.2.5) є однозначним, і повертає одну стаціонарну точку.

$$x_B = \frac{Q^2}{q_B^2} \quad (2.2.6)$$

Визначимо її тип, розглядаючи знак \dot{x} в околі точки $\frac{Q^2}{q_B^2}$.

$$\begin{cases} x_B > \frac{Q^2}{q_B^2} \\ \dot{x}_B < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B < \frac{Q^2}{q_B^2} \\ \dot{x}_B > 0 \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Бачимо, що при збільшенні водяного стовпа відносно стаціонарного значення, рівень прямує на спад, а при зменшенні — на приріст. Це вказує на те, що точка $x_B = \frac{Q^2}{q_B^2}$ є аттрактором [7] в межах системи буферної вази.

Тобто аналіз диференціального рівняння стверджує, що рівень водяного стовпа буферної вази прямуватиме до свого єдиного стаціонарного значення

$$x_B = \frac{Q^2}{q_B^2}.$$

Отже, тепер після проведеного вище аналізу знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.2.3) відносно змінної t .

$$\frac{t}{S_B} + C = \frac{-2\sqrt{x(t)}}{q_B} - \frac{2Q \ln |q_B \sqrt{x_B(t)} - Q|}{q_B^2} \quad (2.2.8)$$

Зауважимо, що це рівняння описує зміну рівня висоти водяного стовпа, поза межами стаціонарної точки, оскільки, при $x_B = \frac{Q^2}{q_B^2}$ ми виходимо з під області визначення функції.

Розглянемо розв'язок (2.2.8) за умови задачі Коші $x_B(t_0) = \eta_B$. Тут η_B відповідає за початковий рівень води у буферній вазі, перед початком спуску води до «Вазы Тантала».

Якщо $\eta_B = \frac{Q^2}{q_B^2}$, то одразу потрапляємо в стаціонарну точку, і залежність висоти стовпа від часу задається рівнянням (2.2.6). Значення потоку $Q_B(t)$, з підстановки стаціонарної точки у (2.2.1) співпадає зі значенням Q . Тоді коливальна система модифікованої вази Тантала повністю повторює поведінку, що описана у першому розділі.

Далі, якщо $\eta_B \neq \frac{Q^2}{q_B^2}$, то можемо визначити константу, що задає єдиний розв'язок задачі Коші з рівняння (2.2.8).

$$C_B = \frac{-t_0}{S_B} - \frac{2\sqrt{\eta_B}}{q_B} - \frac{2Q \ln |q_B \sqrt{\eta_B} - Q|}{q_B^2} \quad (2.2.9)$$

Після підстановки до (2.2.8) та деяких перетворень маємо неявний розв'язок рівняння руху відносно часу.

$$\frac{t-t_0}{S_B} = \frac{2(\sqrt{\eta_B} - \sqrt{x_B(t)})}{q_B} + \frac{2Q}{q_B^2} \ln \left(\frac{|q_B \sqrt{\eta_B} - Q|}{|q_B \sqrt{x_B(t)} - Q|} \right) \quad (2.2.10)$$

Можемо використати підхід для пошуку явного розв'язку, аналогічний до того, що розглядався у попередньому розділі. Однак для цього необхідно позбавитись модуля в записі виразу. Варто перевірити, що значення аргументу логарифму будуть задовольняти області визначення функції.

Нехай аргумент логарифму приймає від'ємні значення, тобто існує такий момент часу \check{t} , де

$$x_B(\check{t}) < \frac{Q^2}{q_B^2} < x_B(t_0) = \eta_B \text{ або } x_B(\check{t}) > \frac{Q^2}{q_B^2} > x_B(t_0) = \eta_B \quad (2.2.11)$$

Оскільки функція руху є неперервною відносно часу, то знайшовся б такий момент $\check{t} \in (t_0, \check{t})$, що $x_B(\check{t}) = \frac{Q^2}{q_B^2}$. Раніше ми вказали, що дана точка є аттрактором. За таких умов, рівень висоти водяного стовпа не зможе покинути цього значення та досягти відмітки $x_B(\check{t})$. Тобто момент \check{t} ніколи не настане, і вище наведені нерівності ніколи не будуть виконані.

Таким чином, далі, вважаємо, що:

$$\frac{q_B \sqrt{\eta_B} - Q}{q_B \sqrt{x_B(t)} - Q} > 0 \quad (2.2.12)$$

Отже далі, послідовність дій повністю повторює аналогічну, в попередньому розділі. Виконаємо перетворення виразу (2.2.10) за умови (2.2.12).

$$\frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right) = \left(\frac{q_B \sqrt{x_B(t)}}{Q} - 1 \right) - \left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) + \ln \left(\frac{\frac{q_B \sqrt{x_B(t)}}{Q} - 1}{\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1} \right) \quad (2.2.13)$$

Після потенціювання та деяких перетворень, маємо вираз виду:

$$\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) \frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} = \left(\frac{q_B \sqrt{x_B(t)}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{x_B(t)}}{Q} - 1 \right)} \quad (2.2.14)$$

Тепер, після піднесення до функції Ламберта на даному кроці, отримаємо явне рівняння руху рівню води у буферній вазі. Однак варто перевірити, що дані вирази входять до області визначення функції Ламберта.

Як було зазначено у пункті **1.3**, верхня гілка функції $W(x)$, яка розглядається у даній роботі, визначена при $x \in [-e^{-1}, +\infty)$.

Розглянемо праву частину рівності **(2.2.14)**. Для неї, приналежність до області визначення $W(x)$, еквівалентна наступній нерівності:

$$\frac{q_B \sqrt{x_B(t)}}{Q} - 1 \geq -1 \quad (2.2.15)$$

Очевидно дана умова виконана, оскільки параметри Q та q_B є додатними, а $x_B(t)$ — невід'ємна.

Розглянемо ліву частину рівності **(2.2.14)**. Для неї, приналежність до області визначення $W(x)$, еквівалентна наступній нерівності:

$$\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right)} e^{\frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \geq -e^{-1} \quad (2.2.16)$$

Зважаючи на результати **(2.2.15)**, з урахуванням того, що функція $x \cdot e^x$ монотонно зростає, при $x \geq -1$, виконана наступна нерівність:

$$\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right)} \geq -e^{-1} \quad (2.2.17)$$

Після застосування оцінки **(2.2.17)** до лівої частини нерівності **(2.2.16)**, маємо оцінку:

$$e^{\frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \leq 1 \quad (2.2.18)$$

Вона очевидно виконана, оскільки аргумент експоненти є від'ємним. Тобто використання функції Ламберта є абсолютно коректним.

Отже, після застосування до виразу **(2.2.14)** функції Ламберта і декількох математичних перетворень, маємо вираз для руху рівня води у буферній вазі:

$$\frac{Q}{q_B} \left(W \left(\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right)} e^{\frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} + 1 \right) \right) = \sqrt{x_B(t)} \quad (2.2.19)$$

Зауважимо, що він, також, коректно описує функцію рівня висоти водяного стовпа і в стаціонарній точці. При початковому рівні води $\eta_B = \frac{Q^2}{q_B^2}$, рівняння руху задається як $x_B = \frac{Q^2}{q_B^2}$. Цей результат було і вказано раніше.

Таким чином **(2.2.19)** повноцінно описує поведінку рівня води в буферній вазі залежно від параметру початкового рівня води η_B .

З рівнянь **(2.2.1)**, **(2.2.2)** і **(2.2.19)** отримуємо рівняння потоку виходу з буферної вази.

$$Q_B(t) = Q W \left(\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) \frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \right) + Q \quad (2.2.20)$$

2.3. Пошук об'єму води, що потрапляє у вазу Тантала

Для функції висоти водяного стовпа, важливо знати не тільки значення потоку в кожний момент часу, а й значення об'єму води, що потрапив до вази Тантала за визначений проміжок. Отриманий результат буде застосовано в пошуку рівняння висоти водяного стовпа у фазі набору води. Для цього розглянемо невизначений інтеграл від рівняння потоку виходу з буферної вази.

$$\int Q_B(t) dt = \int \left(Q W \left(\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) \frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \right) + Q \right) dt \quad (2.3.1)$$

Користуючись лінійністю інтегралу, вираз **(2.3.1)** набуває виду:

$$\int Q_B(t) dt = Q \int W \left(\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) \frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \right) dt + Qt \quad (2.3.2)$$

Далі, розглянемо інтеграл від функції Ламберта окремо.

$$\int W \left(\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B}}{Q} - 1 \right) \frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \right) dt \quad (2.3.3)$$

Для його підрахунку, розглянемо заміну аргументу функції Ламберта.

$$\chi(t) := \left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B} - 1}{Q} \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B} - 1}{Q} \right)} e^{\frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \quad (2.3.4)$$

$$d\chi = \left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B} - 1}{Q} \right) e^{\left(\frac{q_B \sqrt{\eta_B} - 1}{Q} \right)} e^{\frac{-q_B^2}{2Q} \left(\frac{t-t_0}{S_B} \right)} \cdot \frac{-q_B^2}{2QS_B} dt = \chi \frac{-q_B^2}{2QS_B} dt \quad (2.3.5)$$

Отримаємо після зазначеної заміни наступний вираз інтегралу (2.3.3).

$$\int \frac{W(\chi)}{\chi \frac{-q_B^2}{2QS_B}} d\chi \quad (2.3.6)$$

Цей запис, з лінійності, є еквівалентним до поданого нижче.

$$\frac{-2QS_B}{q_B^2} \int \frac{W(\chi)}{\chi} d\chi \quad (2.3.7)$$

Далі, достатньо виконати заміну функції Ламберта на відповідний параметр. Цей метод зазвичай і використовується в більшості джерел для підрахунку інтегралів від даної функції [6]. Однак випадок інтегрування нашої функції є простішим, ніж пошук первісної від звичайної функції Ламберта, що ми побачимо далі. Отже виконаємо заміну:

$$W(\chi) =: w \quad (2.3.8)$$

$$\chi =: w e^w \quad (2.3.9)$$

$$d\chi = (e^w + w e^w) dw \quad (2.3.10)$$

Тепер інтеграл (2.3.7) стає можливо порахувати як інтеграл від поліному.

$$\begin{aligned} \frac{-2QS_B}{q_B^2} \int \frac{w e^w + w^2 e^w}{w e^w} dw &= \frac{-2QS_B}{q_B^2} \int (1 + w) dw = \\ &= \frac{-2QS_B}{q_B^2} \left(w + \frac{w^2}{2} \right) + C \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Після підстановки замінін (2.3.8) і (2.3.11) в рівняння (2.3.2), маємо наступний вираз для первісної потоку виходу з буферної вази.

$$\int Q_B(t) dt = \frac{-2Q^2 S_B}{q_B^2} \left(W(\chi(t)) + \frac{(W(\chi(t)))^2}{2} \right) + Qt + C \quad (2.3.12)$$

2.4. Рівняння руху рівня води модифікованої вази Тантала

Зараз, розглянемо зміну водяного стовпа у вазі Тантала, якщо вхідний потік описується рівнянням витоків з буферної вази. Знайдемо час тривалості кожної з фаз та функцію руху рівня водяного стовпа у вазі, на цих часових інтервалах.

Загальні розв'язки для нульової та першої фази є однаковими. Знаходимо їх з диференціального рівняння (2.1.1), користуючись, результатами, отриманими в пункті 2.3, щодо пошуку первісної потоку води з буферної вази (2.3.12).

$$x(t) = \frac{1}{S} \int Q_B(t) dt = \frac{-2Q^2 S_B}{S q_B^2} \left(W(\chi(t)) + \frac{(W(\chi(t)))^2}{2} \right) + \frac{Qt}{S} + C \quad (2.4.1)$$

Рівняння руху знаходиться як розв'язок задачі Коші $x(\tau_0) = \eta_0$. Тут τ_0 — відомий момент часу, в який рівень води у вазі Тантала досягає значення η_0 . Тоді розв'язок задачі Коші знаходиться як визначений інтеграл наступним чином.

$$x(t) = \frac{2Q^2 S_B}{S q_B^2} \left(W(\chi(\tau_0)) - W(\chi(t)) + \frac{W^2(\chi(\tau_0)) - W^2(\chi(t))}{2} \right) + \frac{Q(t - \tau_0)}{S} + \eta_0 \quad (2.4.2)$$

Зауважимо, що важко знайти обернену функцію, для отримання функції пошуку моментів зміни фаз, подібно до попереднього розділу. Тому моменти часу τ_1 , коли висота досягає рівня η_1 , будемо знаходити чисельним наближенням, порівнюючи значення функції із шуканою висотою закінчення фази.

Фаза 0: Відповідає підйому рівня води, з дна до висоти h_1 . Вона триває на часовому проміжку $t \in [t_0, t_1]$. Розв'язок відповідає рівнянню (2.4.2) при підстановці параметрів $\tau_0 = t_0, \eta_0 = 0, \eta_1 = h_1$.

$$x(t) = \frac{2Q^2 S_B}{S q_B^2} \left(W(\chi(t_0)) - W(\chi(t)) + \frac{W^2(\chi(t_0)) - W^2(\chi(t))}{2} \right) + \frac{Q(t-t_0)}{S} \quad (2.4.3)$$

Фаза 1: Відповідає підйому рівня води, з висоти h_1 до h_2 . Вона триває на часових проміжках $t \in [t_i, \hat{t}_i]$. Розв'язок знаходиться з рівняння (2.4.2) при підстановці параметрів $\tau_0 = t_i, \eta_0 = h_1, \eta_1 = h_2$.

$$x(t) = \frac{2Q^2 S_B}{S q_B^2} \left(W(\chi(t_i)) - W(\chi(t)) + \frac{W^2(\chi(t_i)) - W^2(\chi(t))}{2} \right) + \frac{Q(t-t_i)}{S} + h_1 \quad (2.4.4)$$

Фаза 2: Описується розв'язком диференціального рівняння (2.1.3). Однак, його аналітичний розв'язок отримати важко. Тому, для математичного моделювання рівня води за цієї фази, було використано метод чисельного розв'язку диференціальних рівнянь Рунге-Кутти четвертого порядку [8].

Був обраний саме цей метод, оскільки чисельні розв'язки є достатньої точності, легкими в реалізації та швидкими в комп'ютерному обчисленні.

Моменти зміни фаз, були отримані також методом послідовних наближень.

Рівняння похідних були отримані з перетворених диференціальних рівнянь (2.1.1), (2.1.2) та (2.1.3) відповідно.

$$\text{Фаза 0:} \quad \dot{x} = \frac{Q_B(t)}{S} \quad t \in (t_0, t_1] \quad (2.4.5)$$

$$\text{Фаза 1:} \quad \dot{x} = \frac{Q_B(t)}{S} \quad t \in (t_i, \hat{t}_i) \quad (2.4.6)$$

$$\text{Фаза 2:} \quad \dot{x} = \frac{Q_B(t)}{S} - \frac{q}{S} \sqrt{x(t) + h_3} \quad t \in (\hat{t}_i, t_{i+1}) \quad (2.4.7)$$

Фазовий простір даної системи є трьохвимірним. Розгляду двох вимірностей: висоти та швидкості, подібно до першого розділу, вже недостатньо, оскільки ці параметри не однозначно задають майбутню поведінку коливань. Необхідно додати третю вимірність, що відповідає висоті води у буферній вазі. Тоді, у фазових траєкторіях немає самоперетинів, та всі вони прямують до єдиного граничного циклу, породженого атрактором в рівнянні потоку.

Фазова траєкторія визначена наступною параметрично заданою кривою зі змінною часу, як параметром:

$$y = \{(x(t), \dot{x}(t), x_B(t)) : t \in [t_0, +\infty)\} \quad (2.4.8)$$

Отже, математичну модель модифікованої «Вазі Тантала» побудовано.

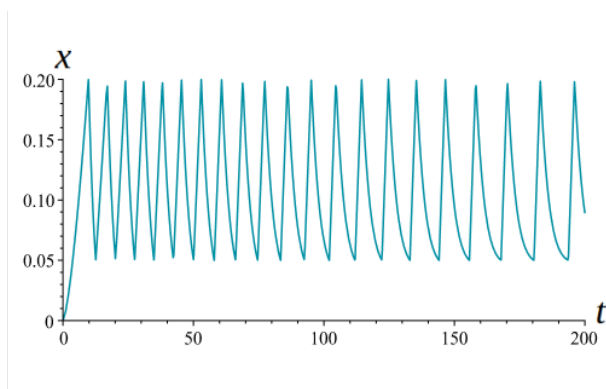
2.5. Аналіз графічної візуалізації моделі модифікованої «Вазі Тантала»

Як було зазначено раніше, у буферній вазі спостерігається положення атрактору. Побудована нами система, спрямовує значення вхідного потоку до «Вазі Тантала» $Q_B(t)$, до значення вхідного потоку до буферної вазі Q . Завдяки цьому, можливо спостерігати динаміку зміни характеру коливань впродовж часу. Її можете спостерігати у візуалізаціях моделі, трохи нижче.

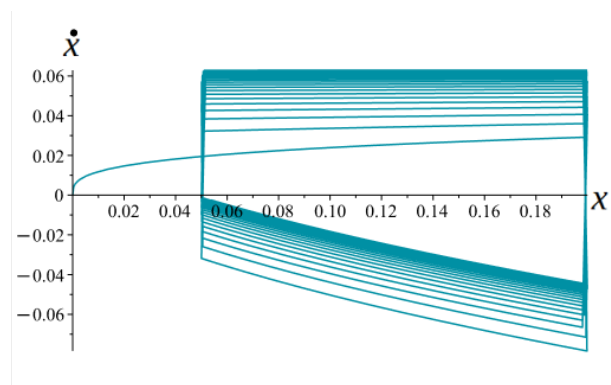
Зауважимо, що в побудованих графічних візуалізаціях фазових траєкторій, розглядається саме їх проєкція на площину висоти та швидкості водяного стовпа у «Вазі Тантала».

Дані графічні візуалізації, є моделями коливального процесу в модифікованій системі «Ваза Тантала», при незмінних всіх параметрах системи, окрім початкового рівня води в буферній вазі та значення вхідного до буферної вазі потоку. Завдяки змінам даних параметрів можливо спостерігати цікаву динаміку коливального процесу впродовж часу.

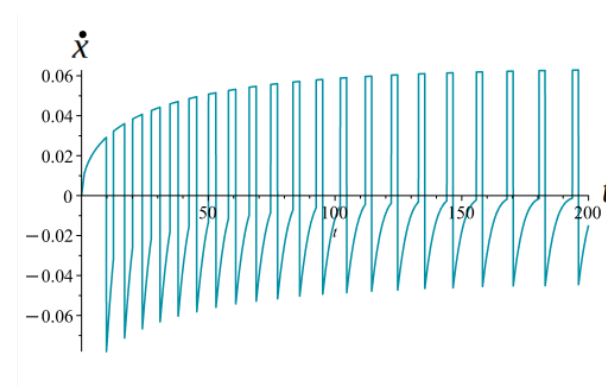
Спостереження поведінки системи за Q більшого за оптимальний та початкового рівня нижче атрактора



Графік 11: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 12: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 13: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$Q := 0.000128$$

$$S := 0.002$$

$$q := 0.0001 \cdot \sqrt{20}$$

$$h_1 := 0.05$$

$$h_2 := 0.2$$

$$h_3 := 0.032$$

$$S_B := 0.05$$

$$q_B := 0.0001 \cdot \sqrt{20}$$

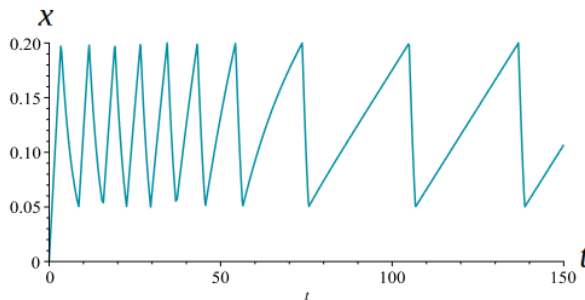
$$\eta_B := 0.0000001$$

Параметри

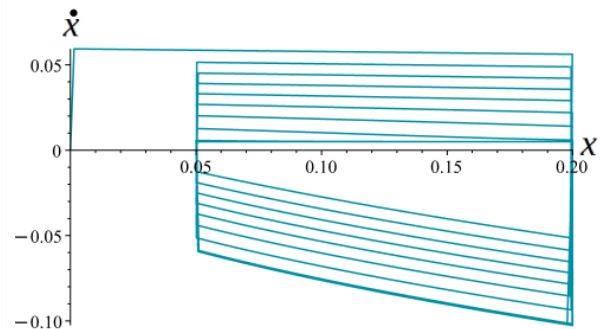
В поданій візуалізації коливального процесу спостерігається, як характер коливань поступово змінюється від поведінки при домінації терміну набору води, наведеної в *Графіках 2, 5, 8*, до поведінки відповідній довгому спуску води показаної в *Графіках 4, 7, 10*.

На проекції фазового простору *Графік 12* бачимо фазову траєкторію, що відповідає наведеним коливанням і прямує до граничного циклу, який можете спостерігати на *Графіку 10*.

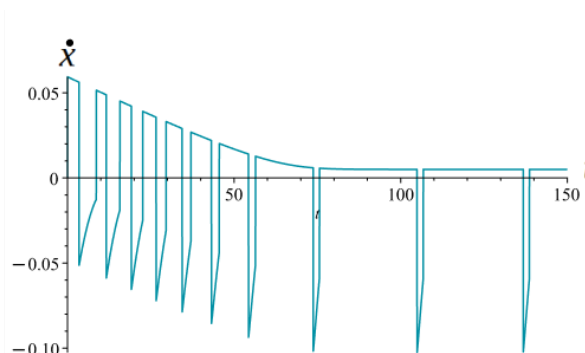
Спостереження поведінки системи за Q меншого за оптимальний та початкового рівня вище атрактора



Графік 14: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 15: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 16: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$\begin{aligned}
 Q &:= 0.00001 \\
 S &:= 0.002 \\
 q &:= 0.0001 \cdot \sqrt{20} \\
 h_1 &:= 0.05 \\
 h_2 &:= 0.2 \\
 h_3 &:= 0.032 \\
 S_B &:= 0.05 \\
 q_B &:= 0.0001 \cdot \sqrt{20} \\
 \eta_B &:= \frac{Q^2}{q_B^2} + 0.07
 \end{aligned}$$

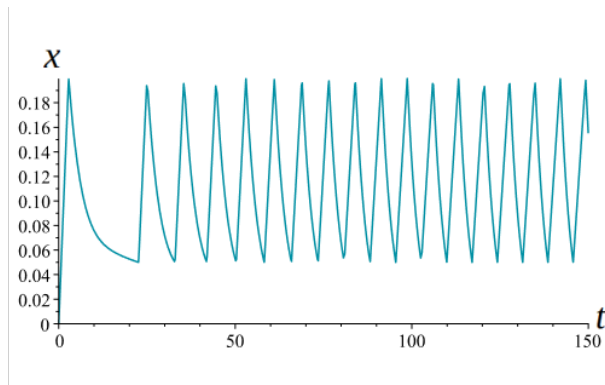
Параметри

Наведений приклад моделює початковий рівень води у буферній вазі більший за стаціонарний, однак в межах умови (1.1.7), та вхідний потік до буферної вази, що відповідає довгій тривалості фази набору.

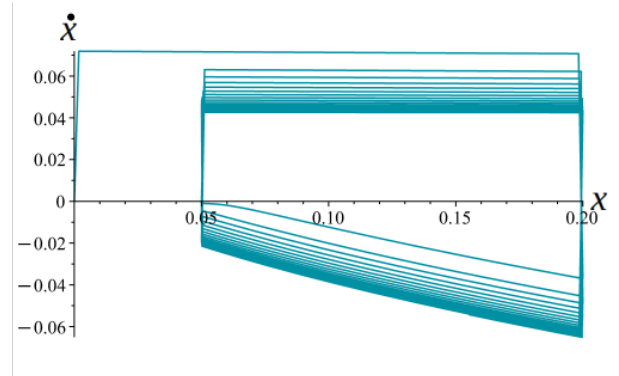
Спостерігається поступова зміна коливань, що прямує до поведінки, показаної на *Графіках 2, 5, 8*.

Цікавим спостереженням є те, що фазова траєкторія прямує до граничного циклу досить лінійно наодміну від інших прорахованих моделей. Дослідження цієї особливості може базуватись на розгляді графіку швидкості зміни водяного стовпа та спостереження за динамікою зміни вихідного потоку з буферної вази при зазначених параметрах.

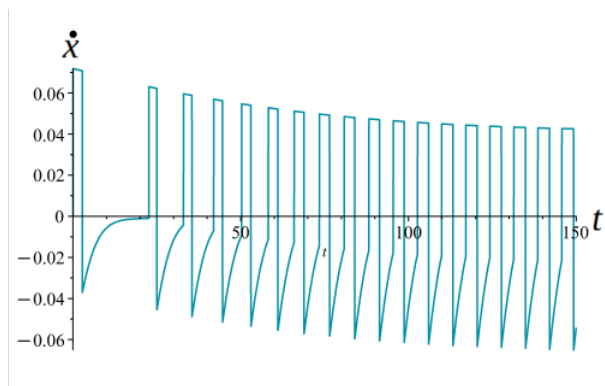
Спостереження поведінки системи за Q оптимального та початкового рівня вище атрактора



Графік 17: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 18: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 19: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$Q := 0.00008176037682$$

$$S := 0.002$$

$$q := 0.0001 \cdot \sqrt{20}$$

$$h_1 := 0.05$$

$$h_2 := 0.2$$

$$h_3 := 0.032$$

$$S_B := 0.05$$

$$q_B := 0.0001 \cdot \sqrt{20}$$

$$\eta_B := \frac{Q^2}{q_B^2} + 0.07$$

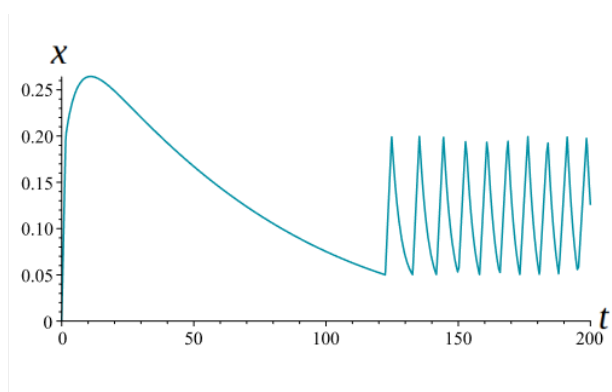
Параметри

Наведений приклад моделює початковий рівень води у буферній вазі більший за стаціонарний однак в межах умови (1.1.7), та вхідний потік, що відповідає характеру коливань з оптимальним періодом.

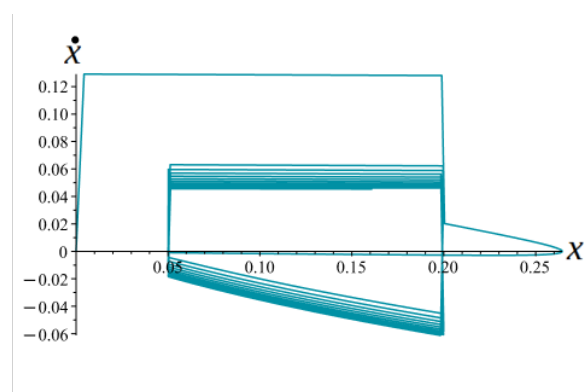
Спостерігається поступова зміна коливань, що прямує до поведінки, показаної на *Графіках 3, 6, 9*.

Тут, наочно видно, що незначне відхилення значення вхідного потоку до «Вазы Тантала» має суттєвий вплив на термін фази спуску води, коли значення потоку дещо більше за оптимальне.

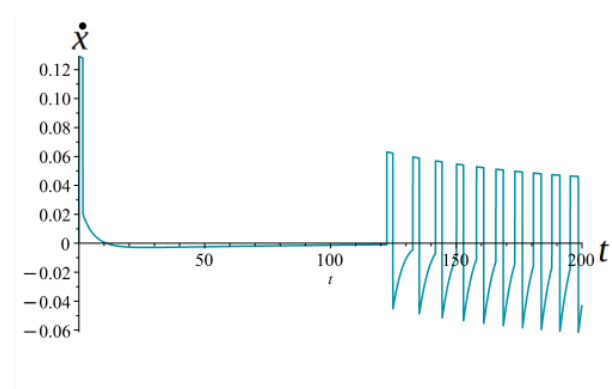
Спостереження поведінки системи за Q оптимального та початкового рівня значно вище атрактора



Графік 20: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 21: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 22: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$Q := 0.00008176037682$$

$$S := 0.002$$

$$q := 0.0001 \cdot \sqrt{20}$$

$$h_1 := 0.05$$

$$h_2 := 0.2$$

$$h_3 := 0.032$$

$$S_B := 0.05$$

$$q_B := 0.0001 \cdot \sqrt{20}$$

$$\eta_B := \frac{Q^2}{q_B^2} + 0.3$$

Параметри

Наведені графіки є візуалізацією модифікованої моделі «Ваза Тантала» за початковому рівні води у буферній вазі значно більшому за стаціонарний, так, що умова (1.1.7) для потоку $Q_B(t)$ вже не є виконаною, та при значенні вхідного потоку Q , що відповідає оптимальному періоду.

Перше коливання відбувається суттєвий проміжок часу однак по його завершенню, модель повторює поведінку попередньої наведеної моделі.

Опуклість на фазовій траєкторії виникає, оскільки під час фази спуску, деякий час спостерігається додатній приріст рівня водяного стовпа. Однак він є значно меншим за приріст попередньої фази, що впливає на її положення.

Зауважимо, що завдяки збільшенню початкового рівня води у буферній вазі, можливо досягти стану системи, в якому на деякий час «Ваза Тантала» не потрапляє в умову автоколивального процесу, описану рівнянням (1.1.7). Однак, завдяки тому, що положення атрактору задовольняє вказаній умові, коливання, врешті, починають відбуватись та спрямовуються до відповідного граничного циклу.

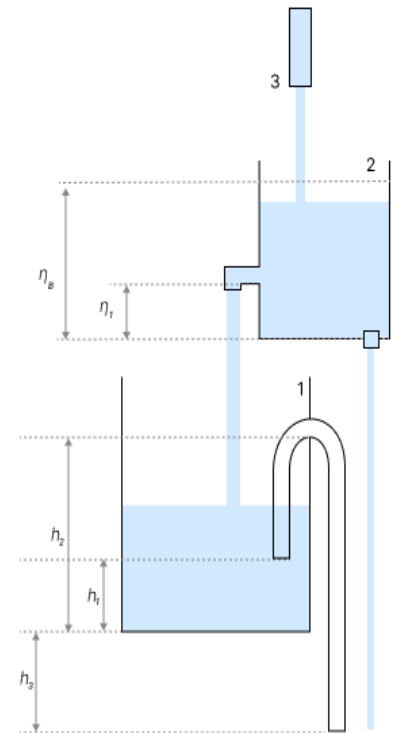
2.6. Підсумок розділу

В даному розділі ми побудували фізично обґрунтовану модель модифікації автоколивальної системи «Ваза Тантала». На жаль, отримати повністю аналітичну математичну модель не вдалося, оскільки на шляху ми зустрілись з важкорозв'язним в аналітичних функціях диференціальним рівнянням. Однак ми чисельно знайшли розв'язок та графічно показали динаміку системи за різних значень параметрів, що досить наочно показує збіжність автоколивань до стаціонарних. Дана автоколивальна система симулює м'який спуск [1], оскільки в ній наявний єдиний стійкий граничний цикл. Будь-яка фазова траєкторія при довільній початковій умові на η_B опиняється в безпосередній близькості до стійкого граничного циклу.

Ми змогли навести приклад модифікації стаціонарних автоколивань до автоколивань з м'яким спуском, забезпечивши нелінійність підтоку води до системи, але також передбачили в даному підтоці положення атрактору, що і відтворює коливання з м'яким спуском.

3. Модель «Ваза Тантала» з жорстким спуском

Для моделювання жорсткого спуску в автоколивальній системі «Ваза Тантала», розглянемо модифікацію, висвітлену в попередньому розділі системи. Обладнаємо буферну вазу додатковим зворотним клапаном, що добре пропускає воду при малій висоті водяного стовпа, та його пропускна здібність зменшується при збільшенні тиску води на клапан. Отвір, з якого потік надходить до «Вазы Тантала», перенесемо дещо вище дна буферної вазы й модифікуємо його до носика.



Модель 3: Ваза Тантала з жорстким спуском

Рівномірний потік води попередньо надходить до модифікованої буферної вазы (2), частина води покидає її через клапан, а частина — через носик вазы (2) та потрапляє до «Вазы Тантала» (1). В початковий момент часу, вода у ємності (1) відсутня.

Механізм коливального процесу, що спостерігається у «Вазі Тантала» (1) відбувається аналогічно до попередніх розділів у 3 фази: початкову, фазу набору та фазу спуску води. Однак характер та динаміка коливань, стають ще більш цікавими, завдяки нелінійному параметру потоку води з буферної вазы (2).

Зауважимо, що в даній моделі, функція зворотного клапана розглядається як суто математичний приклад і не несе під собою фізичного опису роботи такого зворотного клапана в дійсності. Основна задача цього розділу полягає в описі можливих умов на подібні функції, для отримання автоколивального процесу з жорстким спуском та суто теоретичному аналізі можливих коливань.

3.1. Побудова й аналіз диференціальних рівнянь буферної вази

Визначимо додаткові позначення для буферної вази:

$S_B [m^2]$ — площа перерізу буферної вази

$s_B [m^2]$ — площа перерізу носика буферної вази

$\eta_B [m]$ — початковий рівень води у буферній вазі відносно її дна

$\eta_1 [m]$ — рівень отвору носика у буферній вазі відносно її дна

$v_B [m/c]$ — швидкість виходу потоку з носика буферної вази

$x_B(t) [m]$ — рівень води у буферній вазі відносно її дна

$Q_B(t) [m^3/c]$ — потік води виходу з носика буферної вази

$Q_K(x_B) [m^3/c]$ — потік води виходу з клапану буферної вази

Відповідно до вище наведеного опису моделі, побудуємо диференціальне рівняння, що описує зміну об'єму води всередині буферної вази. Потік води з носика вази розраховуємо по Закону Бернуллі [5], зважаючи на перепозначення аналогічно до (2.2.2).

$$q_B = s_B \sqrt{2g} \equiv const \quad (3.1.1)$$

Тоді диференціальне рівняння зміни об'єму води всередині буферної вази є наступним:

$$S_B \cdot dx = Q \cdot dt - q_B \sqrt{x_B(t) - \eta_1} \cdot dt - Q_K(x_B(t)) dt \quad (3.1.2)$$

Зауважимо, що при $x_B(t) < \eta_1$ з фізичних представлень моделі, потік з носика буферної вази є нульовим, тому не впливає на зміну об'єму в цій вазі. Таким чином рівняння (3.1.2) за даної умови можна переписати так:

$$S_B \cdot dx = Q \cdot dt - Q_K(x_B(t)) dt \quad (3.1.3)$$

З рівнянь (3.1.2) та (3.1.3), виділимо вираз для похідної функції рівня води в буферній вазі.

$$\dot{x}_B = \begin{cases} Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - Q_K(x_B) & , x_B \in [\eta_1, +\infty) \\ Q - Q_K(x_B) & , x_B \in [0, \eta_1) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Тепер, проведемо аналіз даного рівняння на предмет існування стаціонарних точок.

Зараз, ми вивчаємо функцію зміни рівня води у буферній вазі, оскільки саме вона визначає потік води, що потрапляє до «Вазі Тантала». Як вже було наведено у попередньому розділі, стаціонарній точці рівня води у буферній вазі відповідає стаціонарне значення потоку.

Зважаючи на те, що ми маємо намір змоделювати жорсткий спуск автоколивальної системи, розглянемо умови, виконання яких є для цього необхідним. Загалом, динаміку жорсткого спуску описують наступним чином: незначне відхилення від початкового стану системи не призводить до автоколивань, натомість, якщо відхилення буде достатньо суттєвим, система потрапляє в автоколивальний процес та прямує до граничного циклу [1]. В реалізації нашої теоретичної моделі, відхиленню від початкового стану відповідає початкова висота водяного стовпа у буферній вазі.

Описаній вище динаміці жорсткого спуску, відповідає наявність у системі трьох стаціонарних точок:

1. Атрактор в стані рівноваги, при $\eta_B=0$;
2. Репелер [7], при деякому $\eta_B=x_r$;
3. Атрактор при деякому $\eta_B=x_a$.

Зауважимо, що має дотримуватись чітка послідовність $0 < x_r < x_a$.

Для того, щоб при відхиленні від стану рівноваги, в полі дії атрактора $\eta_B=0$, коливальний процес у «Вазі Тантала» певний час спостерігався, необхідно щоб точка відштовхування знаходилась на деякій відстані від отвору носика буферної вазі $\eta_1 < x_r < x_a$. Тоді при $\eta_B < \eta_1$ система є не цікавою, тому розглядати її ми не будемо.

Вище наведений опис відповідає виконанню наступних нерівностей

$$\begin{cases}
 (1) & Q - Q_K(x_B) < 0 & , & 0 < x_B < \eta_1 \\
 (2) & Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - Q_K(x_B) < 0 & , & \eta_1 < x_B < x_r \\
 (3) & Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - Q_K(x_B) = 0 & , & x_B = x_r \\
 (4) & Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - Q_K(x_B) > 0 & , & x_r < x_B < x_a \\
 (5) & Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - Q_K(x_B) = 0 & , & x_B = x_a \\
 (6) & Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - Q_K(x_B) < 0 & , & x_a < x_B < +\infty
 \end{cases}
 \quad (3.1.5)$$

Відповідно теоретичному опису зворотного клапана, $Q_K(x_B)$ монотонно спадає при зростанні x_B . А, оскільки, він відповідає лише за зменшення об'єму води в буферній вазі та ніколи — за збільшення, то $Q_K(x_B)$ додатно визначена функція. Тому, $Q_K(x_B)$ є обмеженою своїм максимальним значенням, до якого вона прямує при зменшенню рівня води. Зважаючи на те, що $q_B \sqrt{x_B - \eta_1}$ необмежено зростає, можемо переконатись, що нерівність (3.1.5)(6), з якогось значення висоти x_B , точно буде виконана.

З нерівності (3.1.5)(1), бачимо, що максимальне значення $Q_K(x_B)$ обов'язково має перевищувати значення вхідного потоку Q .

3.2. Визначення й аналіз функції потоку із зворотного клапану

Відповідно до вище наведених умов, для подальших підрахунків та моделювань, була обрана наступна функція:

$$Q_K(x_B) := C_k \operatorname{arccot}(D_k(x_B - x_0)) \quad (3.2.1)$$

Вона є досить гнучкою в підборі параметрів, за яких шукані стаціонарні точки існують та знаходяться у діапазоні виникнення коливань у «Вазі Тантала».

Пропонується, розглянути наступні параметри:

$$C_k = \frac{2Q}{\pi} \quad \text{для} \quad Q_K(x_0) = Q \quad \text{та} \quad \text{тригонометричної заміни виразу} \quad Q - Q_K(x_B)$$

$$x_0 = \eta_1 \quad \text{для} \quad \text{виконання} \quad \text{нерівності} \quad (3.1.5)(1)$$

D_k для контролю швидкості спаду функції $Q_K(x_B)$

Після визначення цих параметрів, скористуємось тригонометричною заміною:

$$Q - Q_K(x_B) = \frac{2Q}{\pi} \arctan(D_K(x_B - \eta_1)) \quad (3.2.2)$$

Вона допомагає спростити роботу з умовами (3.1.5). Як було визначено раніше, умови (3.1.5)(1) та (3.1.5)(6) вже є виконаними. Зараз суттєвим постає питання існування особливих точок. Тому, розглянемо нуль похідної після всіх введених перепозначень.

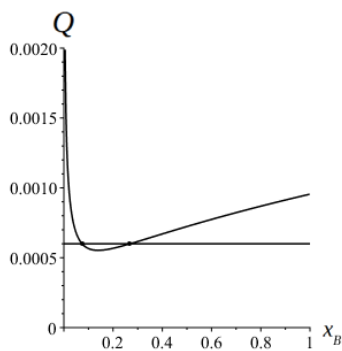
$$\frac{2Q}{\pi} \arctan(D_K(x_B - \eta_1)) = q_B \sqrt{x_B - \eta_1} \quad (3.2.3)$$

Після математичних перетворень виразимо значення потоку.

$$Q = \frac{\pi q_B \sqrt{x_B - \eta_1}}{2 \arctan(D_K(x_B - \eta_1))} \quad (3.2.4)$$

Зараз, проведемо графічний аналіз залежності (3.2.4). Хочемо відповісти на питання: коли існують розв'язки даного рівняння, яка можлива їх кількість та який розкид розв'язків при заданих значеннях параметрів системи в залежності від зміни вхідного потоку.

Графік 23:



$$Q = 0.0006$$

$$q_B = 0.0002 \sqrt{20}$$

$$\eta_1 = 0$$

$$D_k = 10$$

Візуалізація стаціонарних точок в залежності від значення потоку Q

Параметри

Оглядаючи графік, можемо зробити наступні висновки:

- При досить малому значенні потоку, рівність (3.2.4) не має розв'язків.

- На графіку спостерігається екстремум, за якого рівняння (3.2.4) має один розв'язок. Він відповідає шунту [7], оскільки в його околицях похідна приймає від'ємні значення. Однак на практиці спостерігати цю стаціонарну точку неможливо.
- При значенні потоку вище за екстремальне, бачимо існування двох розв'язків, що відповідають шуканим стаціонарним точкам, репелеру і атрактору відповідно. Бачимо, що при подальшому збільшенні значення потоку, віддаль між стаціонарними точками суттєво збільшується, причому репелер стрімко прямує до нульової висоти та зменшує свій вплив на систему. А, атрактор, навпаки, стрімко зростає, що може повпливати на те, що дане стаціонарне значення може не задовольняти умову на коливальний процес у «Вазі Тантала».

Даний аналіз допоміг впевнитися, що параметри підібрані для моделювання системи є доречними. На перетині графіку стаціонарних точок та обраного потоку Q , знайдено розв'язки які відповідають автоколивальному процесу у «Вазі Тантала».

Відповідно ми визначили модель теоретичного витоку води зі зворотного клапану, що підходить за своїми властивостями.

$$Q_K(x_B) := \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arccot}(10(x_B - \eta_1)) \quad (3.2.5)$$

3.3. Побудова і графічний аналіз автоколивальної моделі

Перш ніж перейти до розгляду диференціальних рівнянь висоти водяного стовпа у «Вазі Тантала», визначимо значення потоку води, що потрапляє до неї з буферної вази. Це значення відповідає витоку води з носіку буферної вази.

$$Q_B(t) := q_B \sqrt{x_B(t) - \eta_1} \quad (3.3.1)$$

Однак $x_B(t)$ все ще не є визначеною. Оскільки нас цікавить витік води $Q_B(t)$, що визначений лише при $x_B \in [\eta_1, +\infty)$, розглянемо побудоване рівняння (3.1.4) за цієї умови.

$$\dot{x}_B = Q - q_B \sqrt{x_B - \eta_1} - \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arccot}(10(x_B - \eta_1)) \quad (3.3.2)$$

Змінні у цьому рівнянні розділяються однак знайти поданий інтеграл аналітично проблематично.

Для моделювання розв'язку було використано чисельний метод Рунге-Кутти четвертого порядку [8]. Поставлена задача Коші для обчислення єдиного розв'язку є наступною $x_B(t_0) = \eta_B$. Значення потоку, що потрапляє до «Вазі Тантала», отримуємо, після підстановки отриманого чисельного розв'язку в рівняння (3.3.1),

Диференціальне рівняння, що описує зміну водяного стовпа у «Вазі Тантала», задається для кожної з фаз, абсолютно аналогічно до (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3)

$$\text{Фаза 0:} \quad S \cdot dx = Q_B(t) \cdot dt \quad t \in [t_0, t_1] \quad (3.3.3)$$

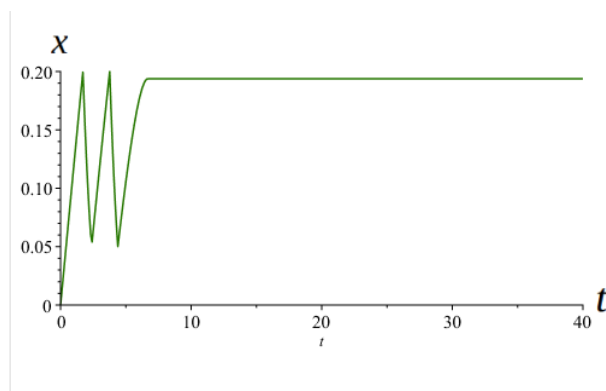
$$\text{Фаза 1:} \quad S \cdot dx = Q_B(t) \cdot dt \quad t \in [t_i, \hat{t}_i] \quad (3.3.4)$$

$$\text{Фаза 2:} \quad S \cdot dx = Q_B(t) \cdot dt - q \sqrt{x(t) + h_3} \cdot dt \quad t \in [\hat{t}_i, t_{i+1}] \quad (3.3.5)$$

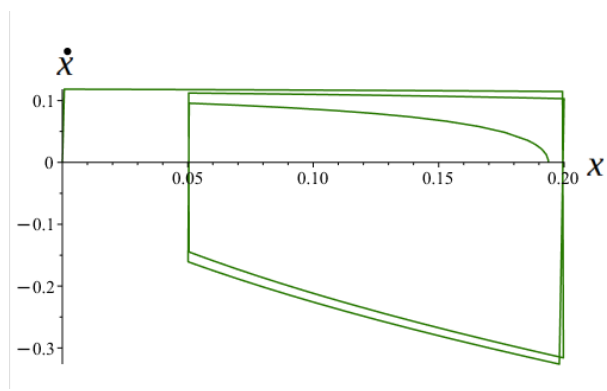
Однак оскільки $Q_B(t)$ задана чисельно, то аналітичні методи розв'язку знову використати неможливо. Аналогічно до пошуку функції рівня висоти водяного стовпа у буферній вазі, розв'язки для «Вазі Тантала» були знову отримані чисельно, методом Рунге-Кутти четвертого порядку [8].

Нижче, розглянемо графічні візуалізації для описаного вище моделювання руху рівня води у «Вазі Тантала».

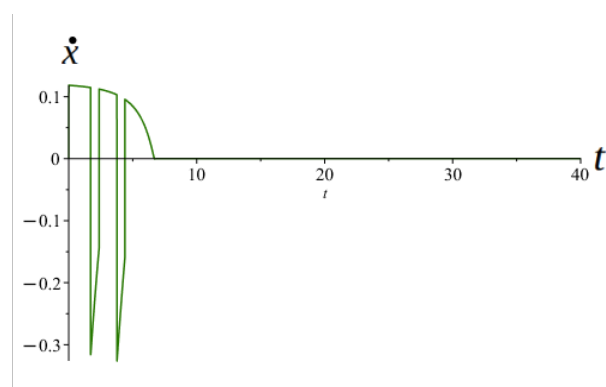
Початковий рівень води у буферній вазі під точкою репелеру



Графік 24: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 25: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 26: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$Q = 0.0006$$

$$S = 0.002$$

$$q = 0.0004 \cdot \sqrt{20}$$

$$h_1 = 0.05$$

$$h_2 = 0.2$$

$$h_3 = 0.032$$

$$SB = 0.002$$

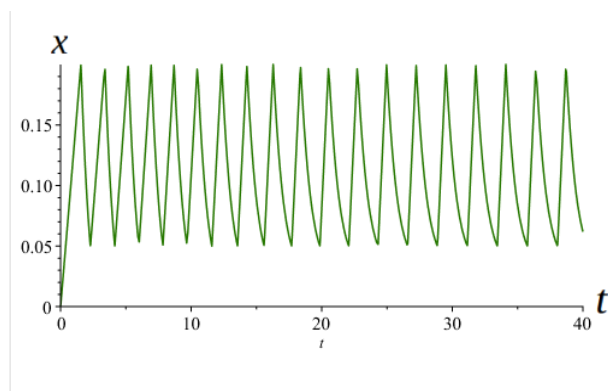
$$qB = 0.0002 \cdot \sqrt{20}$$

$$\eta_b = 0.07$$

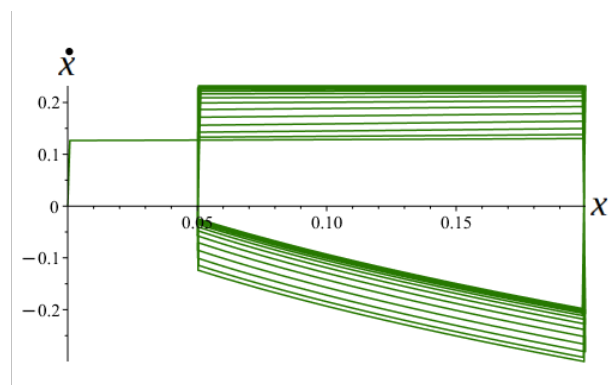
Параметри

Як ми бачимо, при відхиленні $\eta_b=0.07$ потік води з буферної вазі зменшується та з часом повністю зникає. У «Вазі Тантала» за цей термін відбувається декілька коливань, потім рівень води перестає змінюватись та залишається статичним. Цей кінцевий стан системи наочно видно на *Графіку 25*, якому відповідає візуальний кінець фазової траєкторії на вісі x . Зміна характеру коливань перед зупинкою більш наочно спостерігається на графіку зміни швидкості *Графік 26*. Дане моделювання системи із заданими початковими умовами на η_b , відповідає зупинці автоколивального процесу, що є характерним станом для жорсткого спуску автоколивальної системи.

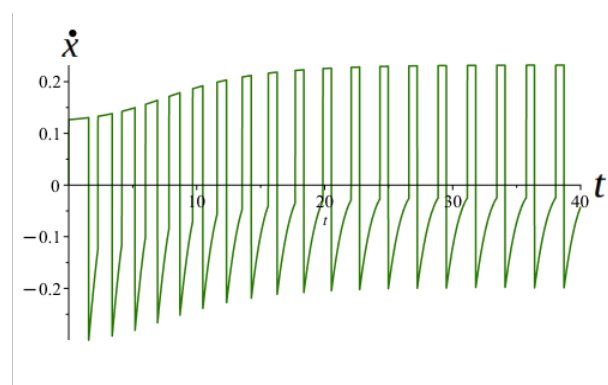
Початковий рівень води у буферній вазі над точкою репелеру



Графік 27: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 28: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 29: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$Q = 0.0006$$

$$S = 0.002$$

$$q = 0.0004 \cdot \sqrt{20}$$

$$h_1 = 0.05$$

$$h_2 = 0.2$$

$$h_3 = 0.032$$

$$SB = 0.002$$

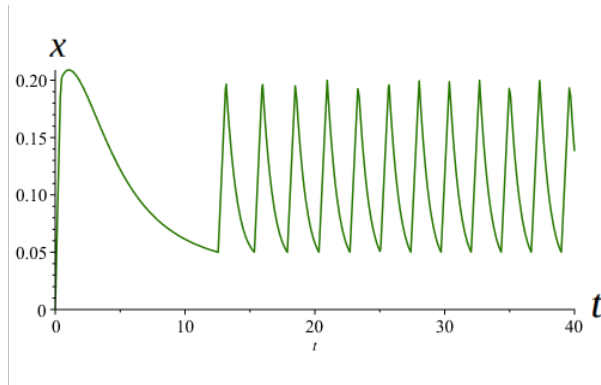
$$qB = 0.0002 \cdot \sqrt{20}$$

$$\eta b = 0.08$$

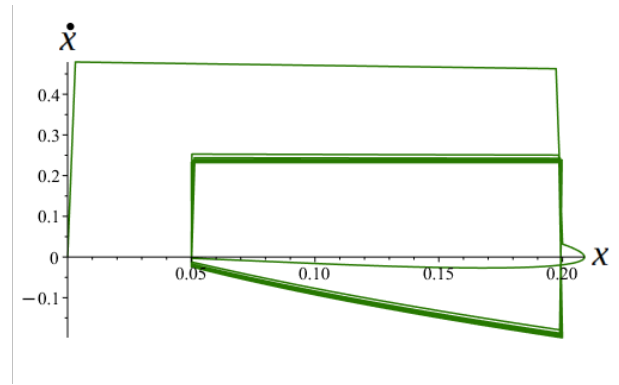
Параметри

Дані графіки згенеровані за аналогічних значень параметрів до попередньої моделі, однак $\eta_b = 0.08$, що всього на 1 сантиметр відрізняється від попереднього. При зміні даного параметру ми спостерігаємо біфуркацію системи за якої фазовий портрет якісно змінюється. Спостерігається граничний цикл, що відповідає стійким автоколиванням. При подальшому зростанні даного параметру, граничний цикл залишається незмінним. Динаміка коливань є дещо подібною до розглянутої на *Графіках 11, 12, 13*, однак на графіку швидкості, візуально спостерігається вплив вхідного потоку, що став ще більш нелінійним за рахунок впливу додаткового клапану.

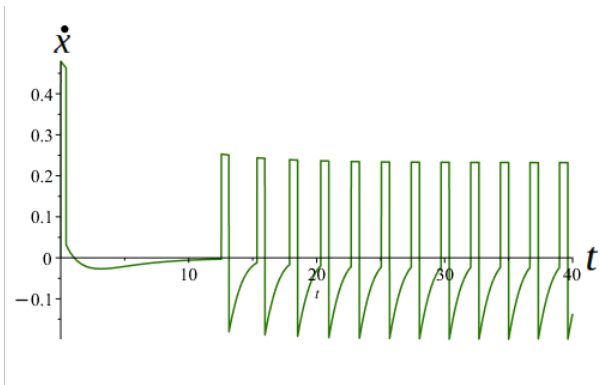
Початковий рівень води у буферній вазі над точкою атрактора



Графік 30: Залежність рівня водяного стовпа від часу



Графік 31: Проекція фазової траєкторії на площину висоти та швидкості



Графік 32: Залежність швидкості зміни водяного стовпа від часу

$$Q = 0.0006$$

$$S = 0.002$$

$$q = 0.0004 \cdot \sqrt{20}$$

$$h_1 = 0.05$$

$$h_2 = 0.2$$

$$h_3 = 0.032$$

$$SB = 0.002$$

$$qB = 0.0002 \cdot \sqrt{20}$$

$$\eta b = 1.15$$

Параметри

В даній моделі, початковий рівень води в буферній вазі знаходиться суттєво над атрактором. Спостерігається, що початковий вхідний потік перевищує значення, за якого відбуваються коливання, однак завдяки тому, що в положенні атрактора коливальний процес є можливим, ми спостерігаємо збудження стійких автоколивань. При порівнянні *Графіків 31 та 28* бачимо, що граничний цикл повністю співпадає. Характер коливань, починаючи з другого, повністю повторює ситуацію наведену в *Графіках 17, 18, 19*.

3.4. Підсумок розділу

В даному розділі ми побудували теоретичну модель модифікації автоколивальної системи «Ваза Тантала», що симулює жорсткий спуск. Наведено умови, необхідні для існування жорсткого спуску автоколивальної системи, та на їх основі запропоновано умови теоретичної модифікації «Вазы Тантала». На прикладі, чисельно змодельовано поведінку системи за різних значень параметру початкового рівня води у буферній вазі та наведено, як він впливає на подальший коливальний процес. Аналіз графічних візуалізацій моделі, показав, що дана модифікація суттєво не змінила характер автоколивань порівняно з результатами отриманими раніше, однак визначено додатковий стан системи, в якому відбуваються нестійкий затухаючий коливальний процес. Суттєвим є спостереження біфуркацій системи, залежно від параметру η_B , оскільки в дійсній реалізації він є досить гнучким у своїх можливих значеннях та зручним для управління системою.

Висновки

Дана робота присвячена дослідженню механізму збудження автоколивань у системах з м'яким та жорстким спусками на прикладі «Вази Тантала». Основна мета роботи полягала в побудові та аналізі математичних моделей на основі релаксаційної автоколивальної системи «Ваза Тантала», які дозволяють отримати динаміку м'якого та жорсткого спусків, зважаючи на введення нелінійної залежності для параметру вхідного потоку, що потрапляє в систему. Актуальність даного дослідження полягає в розширенні погляду на стаціонарні автоколивання з точки зору їх застосування для побудови моделей з м'яким до жорстким спусками, цей погляд може налагодити взаємозв'язок і між іншими автоколивальними системами, для побудови загальної теорії автоколивань.

У ході першого розділу даної роботи, було побудовано аналітичну модель звичайної релаксаційної автоколивальної системи «Вази Тантала», яка дозволила проаналізувати та виявити залежності періоду та характеру автоколивального процесу від значень параметру вхідного потоку води в систему. Дослідження отриманих стаціонарних коливань за різних значень даного параметру, стало основою для побудови аналогічної системи з нелінійними його змінами впродовж часу.

У другому розділі, розроблено фізичну модифікацію «Вази Тантала», та проведено її детальний аналіз. Побудована майже повністю аналітична математична модель коливального процесу, завдяки чому вдалося визначити існування атрактору в значенні вхідного потоку. Саме це стало ключовим фактором у виявленні поведінки м'якого спуску даної автоколивальної системи. Також, було змодельовано коливальний процес та згенеровано графіки, що наочно показують отриману динаміку м'якого спуску.

В останньому розділі, наведено приклад модифікації «Вазі Тантала» для створення моделі з жорстким спуском автоколивальної системи. Проведено детальний аналіз диференціальних рівнянь у буферній вазі, результатом якого виявлено умови модифікації, для отримання бажаного нами результату, а саме існування атрактору в стані рівноваги та репелеру й атрактору для значення потоку в умові виникнення автоколивань у «Вазі Тантала». Було графічно змодельовано автоколивальний процес, заснований на теоретичному розумінні наведеної модифікації. Аналіз отриманих графічних візуалізацій підтвердив коректність наведеного підходу для моделювання жорсткого спуску автоколивальної системи.

Проведений аналіз підтвердив доцільність розгляду стаціонарних автоколивань для симуляції на їх основі автоколивань з м'яким та жорстким спуском. Підхід, який враховує надбудови над постачанням енергії до стаціонарних автоколивальних систем, може бути корисним для узагальнення теорії автоколивань та навмисної симуляції керованого автоколивального процесу із необхідними характеристиками. Наприклад, отримані результати можуть бути використані для проектування механічних систем, які використовують автоколивання для забезпечення стабільної роботи.

Подальші дослідження, можуть бути спрямовані на експериментальну перевірку побудованих моделей, більш глибоке дослідження фізичних процесів, що виникають в розглянутій автоколивальній системі, та розробку повністю фізично обґрунтованої моделі, на основі проведених досліджень, для симуляції жорсткого спуску автоколивальної системи. Також, варто звернути увагу на розробку нових методів класифікації автоколивальних систем, спрямованих на усвідомлення процесу збудження автоколивань та можливих областей їх застосування.

Список використаних джерел

1. Jenkins A. Self-oscillation. *Physics Reports*. 2013. V. 525 P. 167-222.
2. Kerner B.S., Osipov V.V. Autosolitons: A New Approach to Problems of Self-Organization and Turbulence. 2013. 672 p.
3. Grasman J. Relaxation Oscillations. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. 2009. P. 7602-7616.
4. Castet E. Vase de Tantale et trajectoire de phase expérimentale. *Bulletin de l'Union des Physiciens*. 1997. V. 792. P. 417-426.
5. Гмиря Д.І., Давиденко М.М. Рівняння Бернуллі та його застосування у техніці. 2020. 5 с.
6. Mező I. The Lambert W Function. Chapman & Hall, 2022. 274 p.
7. Пічкур В.В., Капустян О.В., Собчук В.В. Теорія динамічних систем. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 347 с.
8. Zingg D.W., Chisholm T.T. Runge–Kutta methods for linear ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*. 1999. V 31. P. 227-238.
9. Chialvo D., Vinet A., Michaels D., Jalife J. Bifurcations in a simple hydraulic oscillator: The «Tantalus' cup». *European Journal of Physics*. 1991. Vol. 12, № 6. P. 297-302.